

PII: S0017-9310(97)00101-4

Modèle de résistances thermiques de contact entre deux surfaces cylindriques : approche microscopique 3 D

A. DEGIOVANNI et XIAOJING YIN ZHANG

 LEMTA URA CNRS 875, INPL, Nancy I ENSEM, 2 Avenue de la Forêt de Haye,
 54500 Vandoeuvre, France

(Reçu 17 mai 1996 et sous forme finale 11 avril 1997)

Resumé—Les résistances thermiques de contact entre matériaux solides sont d'une importance capitale dans de nombreux secteurs industriels. La majeure partie des nombreux travaux sur le sujet, concerne la modélisation de la résistance de contact entre surfaces planes. Nous proposons dans ce papier une modélisation microscopique du contact cylindre-cylindre en régime permanent. Il s'agit d'une modélisation tridimensionnelle entièrement analytique. Ce modèle nous permet d'une part, d'exprimer la résistance thermique de contact sous la forme d'un réseau de trois résistances et de mettre ainsi en évidence la résistance de constriction ; et d'autre part, de montrer que sauf cas très particulier, la résistance de constriction cylindre-cylindre est assimilable à la résistance de constriction plan-plan, résultat qui permet l'utilisation au cas cylindre-cylindre des corrélations obtenues en modèles plan-plan. © 1997 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

INTRODUCTION

Les résistances thermiques de contact entre matériaux solides ont fait l'objet d'études approfondies tant expérimentales que théoriques, on pourra trouver une analyse bibliographique dans les références [1–5]. Le contrôle de la qualité du contact thermique entre matériaux est un problème ancien et d'une importance capitale dans différents secteurs industriels. La connaissance des résistances thermiques de contact présente donc un très grand intérêt pratique.

La majeure partie des travaux concerne la modélisation de la résistance de contact entre surfaces planes [6–12]. Par contre, le problème du contact entre deux surfaces cylindriques a été peu étudié [13–16] et en particulier l'approche microscopique.

Nous proposons une modélisation tridimensionnelle du transfert de chaleur en régime permanent au niveau du contact entre deux couches cylindriques. Ce modèle nous permet d'une part, d'exprimer la résistance thermique de contact sous la forme d'un réseau de trois résistances et de mettre ainsi en évidence la résistance de constriction, et d'autre part, de montrer que sauf cas très particulier, la résistance de constriction cylindre-cylindre est équivalente à la résistance de constriction plan-plan.

cylindre par un grand nombre de cellules unités bi-périodiques. Chaque cellule unité est centrée sur une aspérité définie comme une zone de contact parfait entre les deux milieux. A l'extérieur de l'aspérité, les deux milieux ne sont plus en contact. Ils sont séparés par une couche de fluide interstitiel. On trouvera sur les Figs. 1 et 2 le schéma d'une telle cellule unité avec les notations utilisées.

On traduit le transfert de chaleur dans la cellule unité par le système suivant :

Milieu 1

$$\Delta T_1 = 0 \quad (1)$$

$$T_1 = T_i \quad \text{en } r = R_0 \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\Phi(z, \theta) \quad \text{en } r = R_0 + l_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et } z = a \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad \text{et } \theta = \theta_0. \quad (5)$$

MODÈLE MATHÉMATIQUE

L'approche théorique classique en matière de résistance thermique de contact consiste à diviser le contact en cellules élémentaires toutes identiques appelées cellules unités. On schématise donc le contact cylindre-

Milieu 2

$$\Delta T_2 = 0 \quad (6)$$

$$T_2 = T_e \quad \text{en } r = R_0 + l_1 + l_2 + \delta_1 + \delta_2 \quad (7)$$

NOMENCLATURE

A fonction de constriction
F résistance thermique par unité de surface [$K m^2 W^{-1}$]
k_s, k'_s facteurs de forme de la cellule unité
n nombre de cellules sur une circonférence
R résistance thermique par unité de surface [$K m^2 W^{-1}$]
r variable d'espace radiale [m]
*r** résistance thermique [$K W^{-1}$]
S surface apparente de contact [m^2]
S' surface réelle de contact [m^2]
T température [K]
X résistance thermique de constriction par unité de surface [$K m^2 W^{-1}$]
Y résistance thermique du milieu non perturbé par unité de surface [$K m^2 W^{-1}$]
z variable d'espace axiale [m].

Symboles grèques
 α, β caractéristiques géométriques de la cellule unité
 λ conductivité thermique [$W m^{-1} K^{-1}$]
 Φ, Φ' densité de flux [$W m^{-2}$]
 θ variable d'espace angulaire.

Indices
 a aspérité
 c contact
 ct constriction
 e externe
 f fluide
 i interne
 l limite
 1 milieu 1
 2 milieu 2.

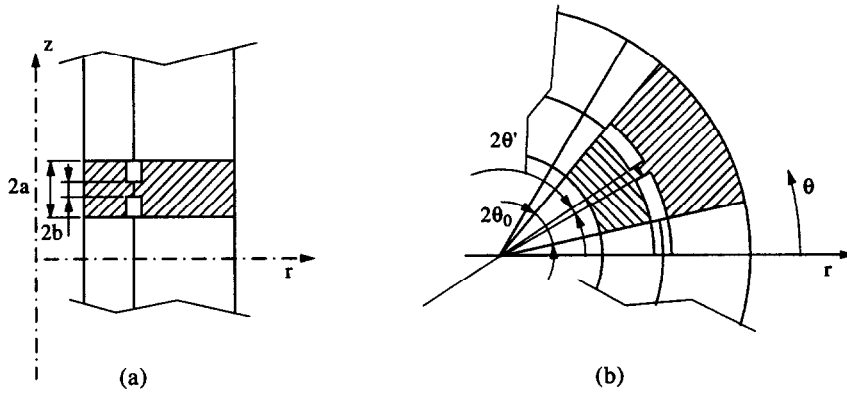


Fig. 1. Découpe bi-périodique de l'échantillon.

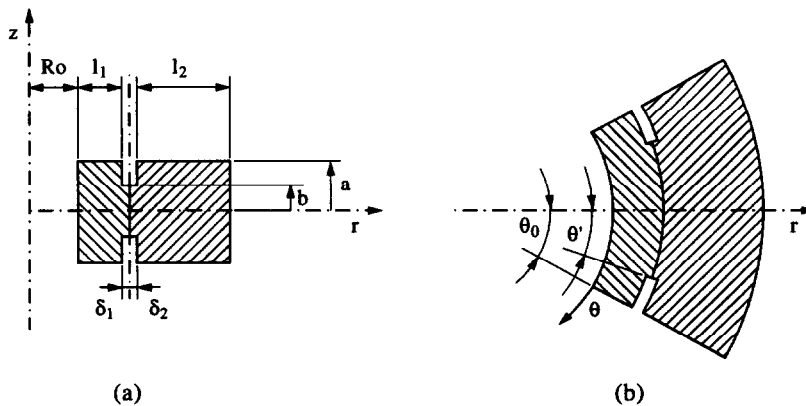


Fig. 2. Cellule unité (a) projection $r-z$; (b) projection $r-\theta$.

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\Phi(z, \theta) \frac{R_0 + l_1}{R_0 + l_1 + \delta_1 + \delta_2}$$

en $r = R_0 + l_1 + \delta_1 + \delta_2$ (8)

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et } z = a \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad \text{et } \theta = \theta_0. \quad (10)$$

Equation de continuité entre milieux 1 et 2

$$T_1 - T_2 = \Phi(z, \theta) R(z, \theta)$$

avec $R = (R_0 + l_1) \left[\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + \delta_1}{R_0 + l_1} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + \delta_1 + \delta_2}{R_0 + l_1 + \delta_1} \right) \right]$

en $0 < \theta \leq \theta' \quad 0 < z \leq b$

et $R = (R_0 + l_1) \frac{1}{\lambda_f} \ln \frac{R_0 + l_1 + \delta_1 + \delta_2}{R_0 + l_1}$

en $0 < \theta < \theta_0 \quad b < z < a$

et $\theta' < \theta < \theta_0 \quad 0 < z \leq b. \quad (11)$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_f$ désignent respectivement la conductivité thermique du milieu 1, du milieu 2, et du fluide.

Ces équations correspondent à un transfert simplifié au niveau du contact. En prenant en compte le fait que l'épaisseur du fluide interstitiel ($\delta_1 + \delta_2$) est toujours très petite devant les dimensions transverses de la cellule (a et $(R_0 + l_1) \theta_0$), nous supposons que le flux est unidirectionnel dans le fluide interstitiel et dans l'aspérité; il est alors possible de traduire le transfert de ces éléments par les résistances thermiques qui apparaissent dans l'équation de continuité (11).

SOLUTION DU MODELE

Dans le système précédent, nous n'avions fait aucune hypothèse sur la densité de flux à l'interface, qui est une fonction des coordonnées d'espace θ et z ; la seule hypothèse simplificatrice se situe au niveau de l'équation de continuité. L'introduction, dans l'écriture du système, de la densité de flux à l'interface permet de résoudre séparément le système d'équation relatif d'un part au milieu 1 et d'autre part au milieu 2.

Par séparation des variables, le champ de température apparaît sous la forme générale :

$$T_1(r, \theta, z) = T_i + \sum_n \sum_m \iint \Phi(z', \theta')$$

$$\Psi_{1nm}(z', \theta') \Psi_{1nm}(z, \theta) \Gamma_{1nm}(r) dz' d\theta' \quad (12)$$

de même pour T_2

$$T_2(r, \theta, z) = T_e + \sum_n \sum_m \iint \Phi(z', \theta')$$

$$\Psi_{2nm}(z', \theta') \Psi_{2nm}(z, \theta) \Gamma_{2nm}(r) dz' d\theta'. \quad (13)$$

En introduisant les relations (12) et (13) dans l'équation de continuité (11), on obtient une équation intégrale à noyau dégénéré dont l'inconnue est la fonction $\Phi(z, \theta)$.

La solution de cette équation est particulièrement difficile; une méthode approchée consiste à se donner a priori la forme de la fonction Φ et à vérifier l'équation de continuité en quelques points et en valeur moyenne. Nos précédents travaux, sur les contacts plan-plan [17, 18] en particulier, nous ont montré qu'une bonne approximation des résistances de constriction était obtenue en choisissant une fonction en escalier à deux niveaux :

* une densité de flux uniforme sur la surface de l'aspérité

$$\Phi(z, \theta) = \Phi' \quad \text{sur } 0 < \theta \leq \theta' \quad 0 < z \leq b$$

* une densité de flux uniforme sur la surface de contact avec le fluide

$$\Phi(z, \theta) = \Phi \quad \text{sur } 0 < \theta \leq \theta_0 \quad b < z \leq a$$

et $\theta' < \theta < \theta_0 \quad 0 < z \leq b.$

L'équation de continuité est alors écrite en valeurs moyennes des températures sur les deux domaines définis précédemment (cette méthode est équivalente dans l'esprit à la méthode des deux flux utilisée en transfert radiatif).

Remarque

En ce qui concerne l'équation de continuité (11), l'hypothèse de flux uniforme ne paraît pas nécessaire puisque les résistances sont constantes sur les deux domaines; il apparaît naturellement les flux moyens après intégration. En fait, il faut nécessairement faire l'hypothèse de densité de flux constante par morceaux pour pouvoir calculer T_1 et T_2 à partir des relations (12) et (13).

Comme dans le cas général, le calcul des températures en fonction de ϕ et ϕ' se fait analytiquement par séparation des variables. La température dans le milieu 1 et le milieu 2 apparaît sous la forme d'une somme de trois termes :

$$T_1(r, \theta, z) = T_i + \phi' F_1(r, \theta, z) + \phi F_2(r, \theta, z) \quad (14)$$

$$T_2(r, \theta, z) = T_e + \phi' F_3(r, \theta, z) + \phi F_4(r, \theta, z). \quad (15)$$

Les expressions des températures $T_1(r, \theta, z)$ et $T_2(r, \theta, z)$ sont données en Annexe 1.

L'équation de continuité écrite en valeurs moyennes forme un système linéaire de deux équations à deux inconnues ϕ et ϕ' ; elle permet de calculer la fonction

en escalier représentant le flux à l'interface des milieux 1 et 2.

En utilisant les expressions des températures moyennes à l'interface, les équations de continuité deviennent :

$$T_i - T_c = \phi' [X + Y\alpha\beta + R'] + \phi [-X + Y(1 - \alpha\beta)] \quad (16)$$

$$T_i - T_c = \phi' [-X\alpha\beta/(1 - \alpha\beta) + Y\alpha\beta] + \phi [X\alpha\beta/(1 - \alpha\beta) + Y(1 - \alpha\beta) + R^*] \quad (17)$$

avec $\alpha = \theta'/\theta_0$, $\beta = b/a$ et Y , la résistance par unité de surface du milieu non perturbé

$$Y = \frac{R_0 + l_1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{R_0 + l_1}{R_0} \right) + \frac{R_0 + l_1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + l_2 + \delta_1 + \delta_2}{R_0 + l_1 + \delta_1 + \delta_2} \right) \quad (18)$$

R' , la résistance par unité de surface de l'aspérité :

$$R' = \frac{R_0 + l_1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + \delta_1}{R_0 + l_1} \right) + \frac{R_0 + l_1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + \delta_2 + \delta_1}{R_0 + l_1 + \delta_1} \right) \quad (19)$$

R^* , la résistance par unité de surface du fluide interstitiel

$$R^* = \frac{R_0 + l_1}{\lambda_f} \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + \delta_2 + \delta_1}{R_0 + l_1} \right) \quad (20)$$

X , la résistance de constriction par unité de surface de l'aspérité

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(\eta_k b) \theta'}{\eta_k^3 \theta_0 a b} \left(\frac{H_{1k}}{\lambda_1} + \frac{H_{2k}}{\lambda_2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(v_i \theta') (R_0 + l_1) b}{v_i^3 \theta_0 a \theta'} \left(\frac{H_{1i}}{\lambda_1} + \frac{H_{2i}}{\lambda_2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2(v_i \theta') \sin^2(\eta_k b) (R_0 + l_1) \theta'}{\eta_k^2 v_i^2 \theta_0 a b \theta'} \times \left(\frac{H_{1ki}}{\lambda_1} + \frac{H_{2ki}}{\lambda_2} \right) \quad (21)$$

Les coefficients H_{ib} , H_{ik} et H_{ki} ($i = 1, 2$) sont présentés en Annexe 2 (pour ne pas alourdir les écritures, on a négligé $\delta_1 + \delta_2$ devant $R_0 + l_1$ dans les annexes).

On définit la résistance thermique de contact de la cellule unité comme la différence entre la résistance thermique de la cellule (r_T) (qui tient compte de la perturbation de température induite par la présence de la zone hétérogène) et la résistance thermique dans le cas du contact parfait (r_0). On appelle alors résistance thermique de contact l'expression :

$$r_c = r_T - r_0 \quad (22)$$

Par définition, la résistance thermique de la cellule unité s'écrit : $r_T = \Delta T / \phi_s$, où ϕ_s est le flux de chaleur traversant la cellule :

$$r_T = \frac{T_i - T_c}{4\phi' (R_0 + l_1) \theta' b + 4\phi (R_0 + l_1) [\theta' (a - b) + (\theta_0 - \theta') a]} \quad (23)$$

Pour le contact parfait on obtient :

$$r_0 = \frac{Y}{4(R_0 + l_1) \theta_0 a} \quad (24)$$

Après résolution du système en ϕ et ϕ' (16) et (17) et en introduisant les expressions obtenues dans l'équation (22), on obtient l'expression de la résistance thermique de contact sous la forme :

$$4(R_0 + l_1) \theta_0 a r_c = \frac{XR^*(1 - \alpha\beta) + XR'\alpha\beta + R^*R'(1 - \alpha\beta)}{R^*\alpha\beta(1 - \alpha\beta) + R'(1 - \alpha\beta)^2 + X} \quad (25)$$

Si l'on se place dans une situation réaliste, c'est à dire, pour des aspérités de petite dimension vis-à-vis la cellule, soit :

$$\alpha\beta \ll 1 \quad \text{alors : } 1 - \alpha\beta \cong 1$$

Si de plus, on remarque que dans tous les cas $R' < R^*$ du fait que la conductivité du fluide est généralement inférieure à celle du solide, alors :

$$XR'\alpha\beta \ll XR^*(1 - \alpha\beta).$$

L'expression (25) se simplifie et devient :

$$4(R_0 + l_1) \theta_0 a r_c \cong \frac{R^*(X/\alpha\beta + R'/\alpha\beta)}{R^* + X/\alpha\beta + R'/\alpha\beta} \quad (26)$$

La résistance thermique de contact de la cellule est donc donnée par :

$$r_c = \frac{r_f(r_{ct} + r_a)}{r_f + r_{ct} + r_a} \quad (27)$$

où

$$r_f = R^*/S : \quad \text{résistance du fluide,}$$

$$r_a = R'/S' : \quad \text{résistance de l'aspérité,}$$

$$r_{ct} = X/S' : \quad \text{résistance de constriction,}$$

et

$$S = 4(R_0 + l_1) \theta_0 a :$$

la surface apparente de contact,

$$S' = 4(R_0 + l_1) \theta' b :$$

la surface réelle de contact d'une aspérité.

Nous avons finalement ramené le transfert thermique dans la cellule à un réseau de trois résistances

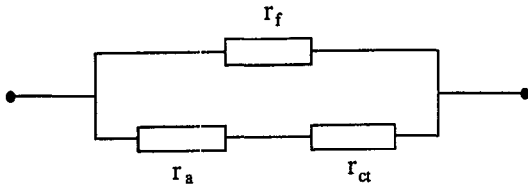


Fig. 3. Réseau de résistances pour les petites aspérités.

(voir la Fig. 3), chacune ayant une signification physique. La résistance du fluide est en parallèle sur l'ensemble résistance d'aspérité en série avec la résistance de constriction.

La résistance de constriction ainsi définie est indépendante de l'aspérité et du fluide; elle n'est fonction que de la géométrie du contact et de la conductivité thermique des matériaux, et peut donc être calculée une fois pour toute quelque soit l'épaisseur de l'aspérité ou la nature du fluide (ce résultat a déjà été obtenu en contact plan-plan). En réalité, ce n'est pas tout à fait le cas, car cette résistance de constriction a été obtenue dans l'hypothèse d'une densité de flux uniforme sur l'aspérité; si l'on modifie cette hypothèse, on modifie la valeur de la constriction. La résistance de constriction est fonction de la répartition de la densité de flux sur la zone de contact; or cette répartition est, en particulier, influencée par l'épaisseur de l'aspérité comme nous l'avons montré pour le contact plan-plan en [18]. Néanmoins, cette variation de la résistance de constriction reste faible, puisqu'elle est comprise dans les cas limites bien connus de type 'densité de flux uniforme' et de type 'température uniforme'; l'écart entre les deux limites étant de 8% dans le cas d'un contact plan-plan.

COMPARAISON DES DIFFÉRENTES GÉOMÉTRIES DE CONTACT

Pour pouvoir comparer les diverses géométries, nous allons réécrire les résistances en fonction des surfaces apparentes et réelles de contact, S et S' , qui sont les seules données mesurables. Dans la littérature on introduit pour caractériser la résistance de constriction une fonction A sans dimension définie à partir des résistances par unité de surface apparente de contact, soit :

$$R_f = R^* \tag{28}$$

$$R_a = \frac{R'}{s^*} \tag{29}$$

et

$$R_{ct} = \frac{K}{s^*} = \frac{A\sqrt{S'}}{\sqrt{\pi s^*}} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \tag{30}$$

où $s^* = S'/S$, le rapport de la surface réelle de contact sur la surface apparente de contact.

A caractérise l'importance de la déformation des lignes de flux dans une cellule donnée. La con-

naissance de cette fonction permet de déterminer la résistance thermique de constriction grâce à la relation (30).

Dans notre cas, la fonction A s'écrit (on passe de X à A par la relation (30)) :

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \left[\frac{1}{\pi^3} \frac{\beta\sqrt{\gamma}}{\alpha^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2(l\pi\alpha)}{l^3} \left(\frac{H_{1l}}{\lambda_1} + \frac{H_{2l}}{\lambda_2} \right) + \frac{1}{\pi^3} \frac{\alpha}{\beta^2\sqrt{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi\beta)}{k^3} \left(\frac{H_{1k}}{\lambda_1} + \frac{H_{2k}}{\lambda_2} \right) + \frac{2}{\pi^4} \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(l\pi\alpha) \sin^2(k\pi\beta)}{l^2 k^2} \left(\frac{H_{1kl}}{\lambda_1} + \frac{H_{2kl}}{\lambda_2} \right) \right] \tag{31}$$

avec $\alpha = \theta'/\theta_0$, $\beta = b/a$ et $\gamma = (R_0 + l_1)\theta'/b$.

Les coefficients H_{il} , H_{ik} et H_{ikl} ($i = 1$ à 2) étant fonction de α , β , et γ et des rapports géométriques R_0/a , l_1/a et l_2/a ; la fonction A est donc définie dans le cas général par sept paramètres, par exemple :

$$A = f(\alpha, \beta, \gamma, R_0/a, l_1/a, l_2/a, \lambda_2/\lambda_1).$$

En pratique, l_1 et l_2 sont toujours supérieur à a et $R_0\theta_0$ (épaisseurs des milieux supérieures aux dimensions de la cellule unité); dans ce cas on montre que A est indépendant de l_1/a et l_2/a (la constriction est 'établie'). Pour simplifier l'étude des formes de contact, on se place dans le cas $\lambda_1 = \lambda_2$; A n'est alors fonction que de quatre paramètres que l'on écrit :

$$s^*, k_s, k'_s \text{ et } n$$

Où $s^* = \alpha\beta$ est le rapport de la surface de contact réel à la surface de la cellule

$$k_s = \gamma = (R_0 + l_1) \frac{\theta'}{b} \text{ caractérise la forme de la cellule}$$

$$k'_s = \frac{\gamma\beta}{\alpha} = (R_0 + l_1) \frac{\theta_0}{a} \text{ caractérise la forme du contact}$$

$$n = \frac{\pi}{\theta_0}$$

est le nombre de cellules sur une circonférence.

Les trois premiers paramètres sont identiques au contact plan sur plan (voir annexe 3); le quatrième prend indirectement en compte la courbure de la cellule; lorsqu'il tend vers l'infini, le problème se ramène au contact plan sur plan. La Fig. 4 présente l'ensemble des géométries étudiées.

Surface apparente de contact 'carrée'

Les géométries étudiées ici correspondent aux Fig. 4(a), soit $k'_s = 1$. La fonction A est représentée suivant

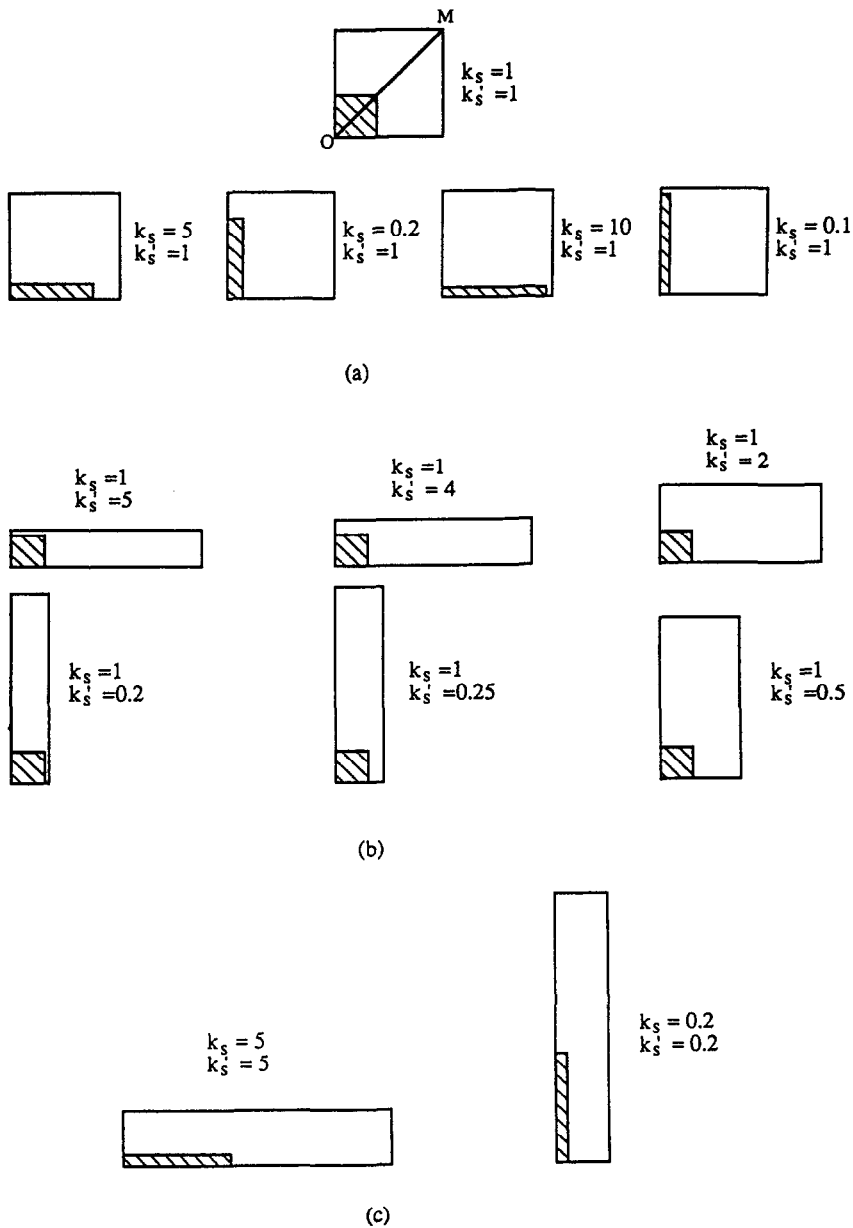


Fig. 4. Schéma des diverses cellules possibles.

les valeurs de $\sqrt{s^*}$ sur la Fig. 5(a, b) pour différentes valeurs de n ; à titre de comparaison, nous avons porté sur la même figure la fonction pour le contact plan-plan ($n \rightarrow \infty$). A la lecture de ces résultats, nous ne notons aucun écart significatif entre le contact plan-plan et le contact cylindre-cylindre quelle que soit n , même faible ($n = 4$).

Surface réelle de contact 'carrée'

On peut également envisager de faire varier la géométrie de la surface apparente de contact. Dans ce qui suit, la surface réelle de contact est supposée carrée, soit $k_s = 1$. En variant la valeur de k'_s , six formes typiques de la surface apparente de contact sont obtenues [Fig. 4(b)]. La Fig. 6(a, b), montre la fonc-

tion A pour différentes valeurs de n . Il apparaît un écart entre le contact cylindre-cylindre et le contact plan-plan dans les cas extrêmes où la valeur de k'_s est éloignée de l'unité en particulier $k'_s = 0.2$ (quelque soit n) ou $k'_s = 5$ avec n petit (cet écart restant néanmoins faible).

Surfaces de contact réelles et apparentes similaires

Nous étudions la géométrie pour laquelle les surfaces de contact réelles et apparentes sont similaires, soit $k'_s = ks$ [Fig. 4(c)]. La Fig. 7 illustre la variation de la fonction A avec $\sqrt{s^*}$ pour le contact cylindre-cylindre et le contact plan-plan. On n'observe aucune différence entre ces diverses courbes.

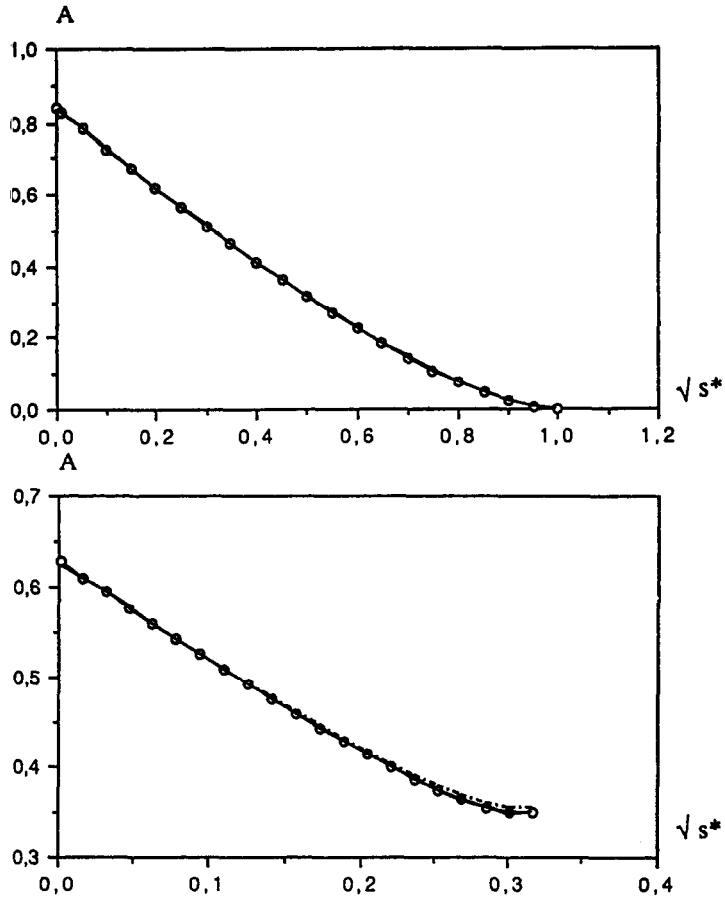


Fig. 5. La fonction A pour une surface apparente de contact "carrée" ($k'_s = 1$) et $\lambda_1 = \lambda_2$: (a) cartésienne: $-O-$ $k_s = 1$ cylindrique: $—$ $k_s = 1; n = 4$ cylindrique: \cdots $k_s = 1; n = 6$ cylindrique: $---$ $k_s = 1; n = 8$ cylindrique $----$ $k_s = 1; n = 16$; (b) cartésienne: $-O-$ $k_s = 0.1$ et 10 cylindrique: $—$ $k_s = 0.1; n = 4$ cylindrique: \cdots $k_s = 0.1; n = 6$ cylindrique: $----$ $k_s = 0.1; n = 8$ cylindrique $----$ $k_s = 0.1; n = 16$.

Différente géométries du contact

Pour finir, nous comparons les diverses fonctions A . La Fig. 8(a, b) montrent respectivement les variations de la fonction A suivant $\sqrt{s^*}$, pour une surface de contact réelle carrée ($k_s = 1$) et pour une surface de contact réelle rectangulaire ($k_s = 5$). Ces tracés montrent que la valeur de A varie aussi bien en fonction de la forme du contact que de celle de la cellule. Toutefois, pour des faibles valeurs de s^* , l'influence de la forme du contact devient prépondérante vis-à-vis de celle de la cellule. En effet, pour une géométrie identique de la surface de contact réelle, la fonction A tend vers une même valeur limite quand s^* tend vers zéro et ce, quelle que soit la géométrie de la cellule. Cette limite correspond à un milieu semi-infini soumis aux conditions aux limites suivantes :

- * flux constant dans un domaine rectangulaire: $-b_1 < x < b_1$ et $-b_2 < y < b_2$;
- * flux nul à l'extérieur.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème beaucoup plus simple que le problème général; transformée de Laplace, séparation des variables ou méthode des sources [19]. L'expression de la tem-

pérature de la surface limite a été obtenue par plusieurs auteurs (voir par exemple [20-22]).

L'expression de la résistance de constriction pour s^* tendant vers zéro peut alors se mettre sous une forme simple :

$$X_1 = \frac{2}{\pi \lambda b_1 b_2} \left[b_1 b_2^2 \sinh^{-1} \frac{b_1}{b_2} + b_2 b_1^2 \sinh^{-1} \frac{b_2}{b_1} + \frac{1}{3}(b_2^3 + b_1^3 - (b_1^2 + b_2^2)^{1.5}) \right] \quad (32)$$

et par suite l'expression de la fonction A est donnée par

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{k_s^{0.5}} sh^{-1} k_s + k_s^{0.5} sh^{-1} \frac{1}{k_s} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k_s^{1.5}} + k_s^{1.5} - \left(\frac{1}{k_s} + k_s \right)^{1.5} \right) \right] \quad (33)$$

On trouvera dans le tableau ci-dessous les résultats concernant les valeurs de la fonction A_i ; le cas classique de la surface de contact circulaire est également rappelé dans le tableau.

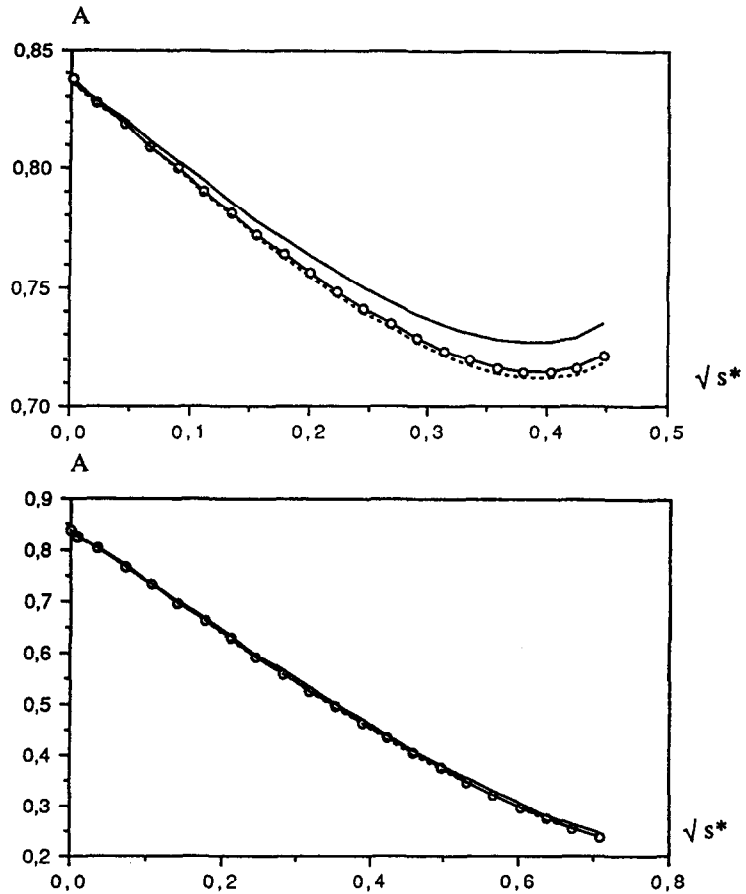


Fig. 6. La fonction A pour une surface réelle de contact 'carée' ($k_s = 1$) et $\lambda_1 = \lambda_2$: (a) cartésienne: $-\circ-$ $k'_s = 5$ et 0.2 , cylindrique: $—$ $k'_s = 0.2$; $n = 20$, cylindrique: \cdots $k'_s = 5$; $n = 4$; (b) cartésienne: $-\circ-$ $k'_s = 2$ et 0.5 , cylindrique: $—$ $k'_s = 2$; $n = 8$, cylindrique: \cdots $k'_s = 0.5$; $n = 4$.

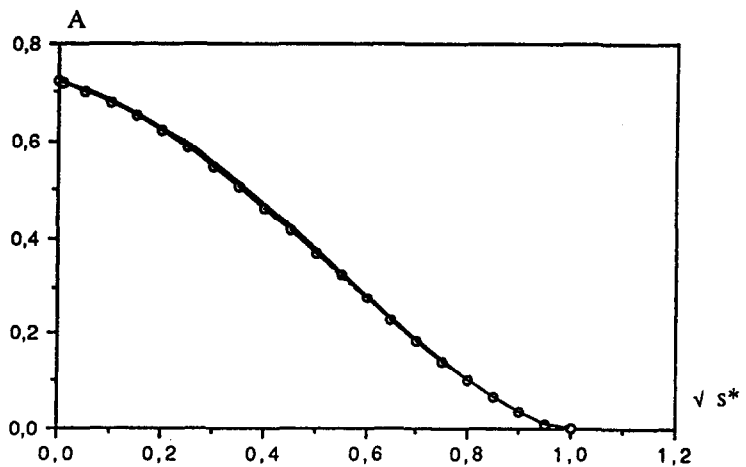


Fig. 7. La fonction A pour des surfaces de contact réelle et apparente similaire ($k'_s = k_s$) et $\lambda_1 = \lambda_2$: cartésienne: $-\circ-$ $k_s = k'_s = 0.2$ et 5 ; cylindrique: $—$ $k_s = k'_s = 0.2$, $n = 20$; cylindrique: \cdots $k_s = k'_s = 0.2$, $n = 80$; cylindrique: $- - -$ $k_s = k'_s = 5$, $n = 4$; cylindrique: $- - -$ $k_s = k'_s = 5$; $n = 16$.

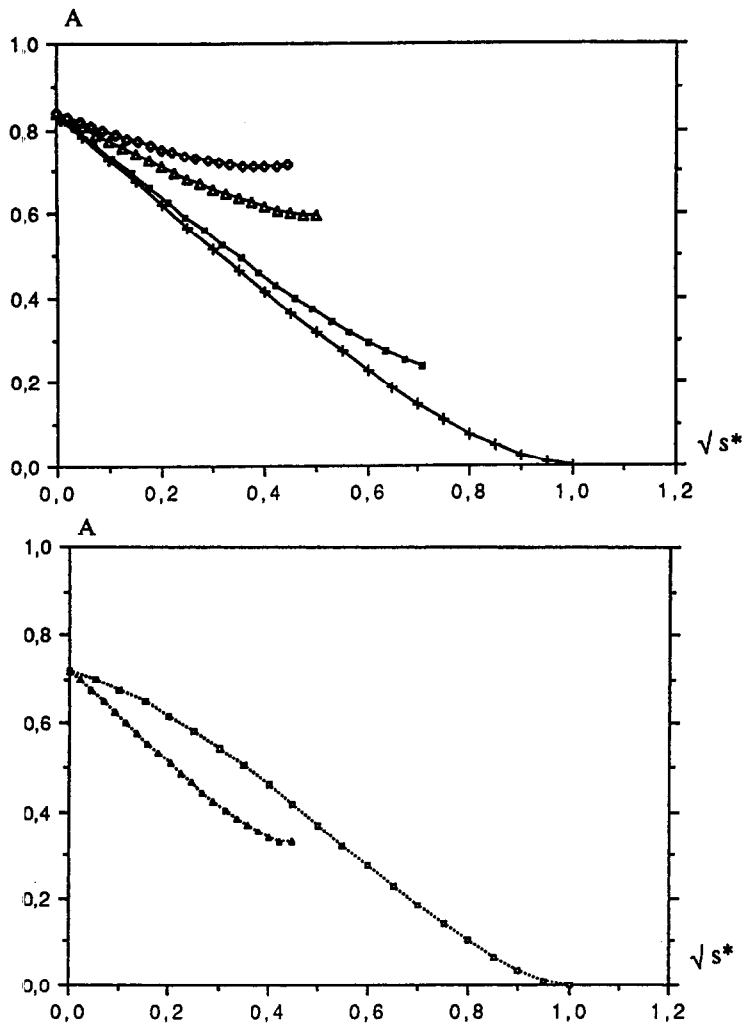


Fig. 8. Comparaison des différentes formes de contact et de cellule : (a) surface réelle de contact 'carrée' ($k_s = 1$) (+ $k'_s = 1$; ■ $k'_s = 2$; △ $k'_s = 4$; ◇ $k'_s = 5$); (b) surface réelle de contact 'rectangulaire' ($k_s = 5$) △ $k'_s = 1$; □ $k'_s = 5$).

Tableau 1. Valeurs de la fonction A_1

k_s	1.0	2.0	4.0	5.0	10.0	Circulaire
		0.5	0.25	0.2	0.1	
A_1	0.839	0.815	0.750	0.724	0.630	0.849

L'expression (33) peut également être obtenue en calculant la limite de la fonction A obtenue en Annexe 3. De même que l'on peut retrouver l'expression de la fonction A pour le contact plan-plan comme limite de l'expression de la fonction A pour le contact cylindre-cylindre; ces calculs sont particulièrement fastidieux.

CONCLUSION

Nous avons développé une modélisation tri-dimensionnelle du transfert thermique en régime permanent au niveau d'un contact entre deux couches cylindriques. Pour résoudre ce modèle, nous avons utilisé

deux approximations classiques en résistance thermique de contact :

- nous avons supposé le flux unidirectionnel dans l'aspérité et le fluide interstitiel;
- nous avons supposé la densité de flux à l'interface uniforme par morceaux (méthode à deux flux).

Dans ce cas, une solution analytique du modèle à été obtenue et par suite une expression explicite de la résistance de contact (formule 25). En se plaçant dans l'hypothèse des 'petites aspérités' (dimensions transverses des aspérités petites devant les dimensions transverses de la cellule unité), on obtient une expression de la résistance de contact à partir de seulement trois résistances indépendantes les unes des autres :

- résistance du fluide interstitiel;
- résistance des aspérités;
- résistance de constriction.

(Ce résultat a déjà été obtenu en contact plan-plan.) L'étude de la résistance de constriction (au travers d'une fonction sans dimension A) pour un grand nombre de géométries, nous permet de conclure, qu'excepté certains cas très particuliers, le contact cylindre-cylindre peut être assimilé à un contact plan-plan. Ce résultat est important car il simplifie énormément les calculs de résistance de constrictions.

Compte-tenu de la forme des courbes des Figs. 5-8 si on se contente d'une valeur de la fonction A à plus ou moins 0.1 (en valeur absolue), on propose une formule valable quelque soit le cas envisagé :

$$A = A_1(1 - \sqrt{s^*}) \quad (34)$$

avec A_1 donnée par la formule (33). Si l'on s'intéresse aux petites aspérités (s^* inférieur à 0.01) la formule (34) donne A à plus ou moins 5%. Néanmoins, nous n'avons envisagé ici que du transfert thermique pur ; si l'on s'intéresse au problème thermo-mécanique, les dilatations ne jouant pas le même rôle pour un contact plan-plan et pour un contact cylindre-cylindre, l'extrapolation de ces résultats devra se faire avec beaucoup de précautions.

REFERENCES

- Bardon, J. P., Introduction à l'étude des résistances thermiques de contact. *Revue Générale de Thermique*, 1972, **125**, 429-447.
- Madhusudana, C. V. and Fletcher, L. S., Contact heat transfer—the last decade. *AIAA Journal*, 1985, **24**(3), 510-523.
- Fletcher, L. S., Recent developments in contact conduction heat transfer. *Journal of Heat Transfer*, 1988, **110**, 1059-1070.
- Bardon, J. P., Résistance de contact : récents développements—aspects industriels nouveaux. *Journée SFT*, 1991.
- Bardon, J. P., Heat Transfer at solid-solid interface: basic phenomenon—recent works. *EUROTHERM 4*, Thermal transfer in composite materials and at solid-solid interface, Nancy, 1988.
- Bardon, J. P., Contribution à l'étude du transfert de chaleur au contact de deux matériaux. Thèse de doctorat d'Etat, Poitiers, 1965.
- Laurent, M., Contribution à l'étude des échanges de chaleur au contact de deux matériaux. Thèse de doctorat d'Etat, Lyon, 1969.
- Sinicki, J. C., Contribution à la mesure de résistance thermique de contact en régime transitoire. Thèse de doctorat d'Etat, Lyon, 1975.
- Padet, J. P., Transfert de chaleur à travers une couche hétérogène. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1968, **11**, 1267-1285.
- Doin, Y., Contribution à l'étude des contacts thermiques solide-solide en régimes variables. Thèse de doctorat de l'INPL, Nancy, 1986.
- Fouche, F. and Cordier, H., Résistance thermique d'un contact par bandes parallèles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1966, **262**(Série B), 1367-1369.
- Fouche, F., Sur la loi de composition des résistances thermiques au contact entre deux matériaux. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 1967, **265**, (Série B), 9-11.
- Gardner, K. A. and Carnavos, T. C., Thermal-contact resistance in finned tubing. *Journal of Heat Transfer*, 1960, 279-293.
- Oliveira, H. Q. and Forslund, R. P., The effect of thermal constriction resistance in the design of channel-plate heat exchangers. *Journal of Heat Transfer*, 1974, **96C**, 292-295.
- Forslund, R. P. and Oliveira, H. Q., The effect of thermal constriction resistance in the design of channel-plate heat exchangers: cylindrical geometry. *Journal of Heat Transfer*, 1975, **97C**, 619-621.
- Hunter, A. and Williams, A., Heat flow across metallic joints—the constriction alleviation factor. *Journal of Heat Mass Transfer*, 1968, **12**, 524-526.
- Degiovanni, A., Sinicki, G., Gery, A. and Laurent, M., Un modèle de résistance thermique de contact en régime permanent. *Revue Générale Thermique*, 1984, **267**, 161-175.
- Degiovanni, A. and Moyne, C., Résistance thermique de contact en régime permanent. Influence de la géométrie du contact. *Revue Générale Thermique*, 1989, **334**, 1-8.
- Carlsaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solid*, 2nd edn. Oxford University Press, New York, 1959.
- Jaeger, J. C., Approximations in transient surface heating. *Australian Journal of Science Research A*, 1952, **5**, 1-9.
- Loewen, E. G. and Shaw, M. C., On the analysis of cutting—tool temperatures. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1951, **76**, 217-231.
- Zhang, X. Y., Détermination de résistances thermiques de contact en géométrie cylindrique. Doctorat de l'INPL, 1993.

ANNEXE 1

Expression des température dans les milieu 1 et 2 en fonction de ϕ et ϕ'

Les systèmes d'équations pour le milieu 1 et milieu 2 se résolvent tous deux directement par séparation des variables r , θ et z . La température dans le milieu 1 en fonction de ϕ et ϕ' est donnée par :

$$\begin{aligned}
 T_1(r, \theta, z) &= T_i - \frac{\phi' S' + \phi(S - S')}{\lambda_1 \theta_0 a} (R_0 + l_1) \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) \\
 &+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2(\phi - \phi') \sin(v_l \theta') b}{\lambda_1 v_l^2 \theta_0 a} \\
 &\times \frac{r^{2vl} - R_0^{2vl}}{r^{vl} \{ (R_0 + l_1)^{vl-1} + R_0^{2vl} (R_0 + l_1)^{-vl-1} \}} \cos(v_l \theta) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\phi - \phi') \sin(\eta_k b) \theta'}{\lambda_1 \eta_k^2 \theta_0 a} \\
 &\times \frac{K_0(\eta_k R_0) I_0(\eta_k r) - I_0(\eta_k R_0) K_0(\eta_k r)}{I_1\{\eta_k(R_0 + l_1)\} K_0(\eta_k R_0) + I_0(\eta_k R_0) K_1\{\eta_k(R_0 + l_1)\}} \\
 &\times \cos(\eta_k z) \\
 &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\phi - \phi') \sin(\eta_k b) \sin(v_l \theta')}{\lambda_1 \eta_k v_l \theta_0 a} \\
 &\times \frac{A}{B + C} \cos(v_l \theta) \cos(\eta_k z) \\
 A &= K_{wl}(\eta_k R_0) I_{wl}(\eta_k r) - I_{wl}(\eta_k R_0) K_{wl}(\eta_k r) \\
 B &= K_{wl}(\eta_k R_0) \left[\eta_k I_{wl-1}\{\eta_k(R_0 + l_1)\} \right. \\
 &\left. - \frac{v_l}{R_0 + l_1} I_{wl}\{\eta_k(R_0 + l_1)\} \right]
 \end{aligned}$$

$$C = I_{0l}(\eta_k R_0) \left[\eta_k K_{0l-1} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} + \frac{v_l}{R_0 + l_1} K_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} \right]$$

où les η_k et v_l sont respectivement les solutions des équations transcendentes :

$$\sin(\eta a) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(v\theta_0) = 0.$$

De même, la température dans le milieu 2 est donnée par :

$$\begin{aligned} T_2(r, \theta, z) &= T_c + \frac{\phi' S' + \phi(S - S')}{\lambda_2 \theta_0 a} (R_0 + l_1) \ln \left(\frac{R_0 + l_1 + l_2}{r} \right) \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2(\phi - \phi') \sin(v_l \theta') b}{\lambda_2 v_l^2 \theta_0 a} \\ &\times \frac{(R_0 + l_1 + l_2)^{2v_l} - r^{2v_l}}{r^{v_l} \{ (R_0 + l_1)^{v_l-1} + (R_0 + l_1 + l_2)^{2v_l} (R_0 + l_1)^{-v_l-1} \}} \\ &\times \cos(v_l \theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\phi - \phi') \sin(\eta_k b) \theta'}{\lambda_2 \eta_k^2 \theta_0 a} \\ &\times \frac{K_0(\eta_k r) I_0 \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} - I_0(\eta_k r) K_0 \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \}}{I_1 \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} K_0 \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} + I_0 \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} K_1 \{ \eta_k (R_0 + l_1) \}} \cos(\eta_k z) \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\phi - \phi') \sin(\eta_k b) \sin(v_l \theta')}{\lambda_2 \eta_k v_l \theta_0 a} \\ &\times \frac{A}{B+C} \cos(v_l \theta) \cos(\eta_k z) \end{aligned}$$

$$A = K_{0l}(\eta_k r) I_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} - I_{0l}(\eta_k r) K_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \}$$

$$B = K_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} \left[\eta_k I_{0l-1} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} - \frac{v_l}{R_0 + l_1} I_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} \right]$$

$$C = I_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1 + l_2) \} \left[\eta_k K_{0l-1} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} + \frac{v_l}{R_0 + l_1} K_{0l} \{ \eta_k (R_0 + l_1) \} \right].$$

ANNEXE 2

Différentes expressions des coefficients H_{ikl}

$$H_{1l} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{-2v_l}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{-2v_l}}$$

$$H_{2l} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)^{-2v_l}}{1 + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)^{-2v_l}}$$

$$H_{1k} = \frac{K_0(k\pi\alpha_1) I_0(k\pi\alpha_2) - I_0(k\pi\alpha_1) K_0(k\pi\alpha_2)}{K_0(k\pi\alpha_1) I_1(k\pi\alpha_2) + I_0(k\pi\alpha_1) K_1(k\pi\alpha_2)}$$

$$H_{2k} = \frac{K_0(k\pi\alpha_2) I_0(k\pi\alpha_3) - I_0(k\pi\alpha_2) K_0(k\pi\alpha_3)}{K_0(k\pi\alpha_3) I_1(k\pi\alpha_2) + I_0(k\pi\alpha_3) K_1(k\pi\alpha_2)}$$

$$H_{1kl} = \frac{A}{B+C}$$

$$A = K_{0l}(k\pi\alpha_1) I_{0l}(k\pi\alpha_2) - I_{0l}(k\pi\alpha_1) K_{0l}(k\pi\alpha_2)$$

$$B = k\pi\gamma\beta K_{0l}(k\pi\alpha_1) I_{0l-1}(k\pi\alpha_2) - l\pi\alpha I_{0l}(k\pi\alpha_2) K_{0l}(k\pi\alpha_1)$$

$$C = k\pi\gamma\beta K_{0l-1}(k\pi\alpha_2) I_{0l}(k\pi\alpha_1) + l\pi\alpha I_{0l}(k\pi\alpha_1) K_{0l}(k\pi\alpha_2)$$

$$H_{2kl} = \frac{A}{B+C}$$

$$A = K_{0l}(k\pi\alpha_2) I_{0l}(k\pi\alpha_3) - I_{0l}(k\pi\alpha_2) K_{0l}(k\pi\alpha_3)$$

$$B = k\pi\gamma\beta K_{0l}(k\pi\alpha_3) I_{0l-1}(k\pi\alpha_2) - l\pi\alpha I_{0l}(k\pi\alpha_2) K_{0l}(k\pi\alpha_3)$$

$$C = k\pi\gamma\beta K_{0l-1}(k\pi\alpha_2) I_{0l}(k\pi\alpha_3) + l\pi\alpha I_{0l}(k\pi\alpha_3) K_{0l}(k\pi\alpha_2).$$

I_0, I_1, I_{0l-1} et I_{0l} fonction de Bessel modifiée de première espèce respectivement d'ordres 0, 1, v_{l-1} et v_l . K_0, K_1, K_{0l-1} et K_{0l} fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce respectivement d'ordres 0, 1, v_{l-1} et v_l .

où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{R_0}{a} & \alpha_3 &= \frac{R_0}{a} + \frac{l_1}{a} + \frac{l_2}{a} & \beta &= \frac{b}{a} \\ \alpha_2 &= \frac{R_0}{a} + \frac{l_1}{a} & \alpha &= \frac{\theta'}{\theta_0} & \gamma &= \frac{(R_0 + l_1)\theta'}{b}. \end{aligned}$$

ANNEXE 3

Expression de la fonction A pour un contact plan-plan

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \left[\frac{1}{\pi^3} \frac{\beta\sqrt{v}}{\alpha^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2(l\pi\alpha)}{l^3} \left(\frac{th(v_l l_1)}{\lambda_1} + \frac{th(v_l l_2)}{\lambda_2} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\pi^3} \frac{\alpha}{\beta^2 \sqrt{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi\alpha)}{k^3} \left(\frac{th(\eta_k l_1)}{\lambda_1} + \frac{th(\eta_k l_2)}{\lambda_2} \right) \\ &\left. + \frac{2}{\pi^5} \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(l\pi\alpha) \sin^2(k\pi\alpha)}{l^2 k^2 \sqrt{\frac{k^2 \alpha^2}{\gamma} + \gamma l^2 \beta^2}} \left(\frac{th(\xi_{kl} l_1)}{\lambda_1} + \frac{th(\xi_{kl} l_2)}{\lambda_2} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\beta = \frac{b_2}{a_2}$$

$$v = \frac{b_1}{b_2}$$

$$v_l = \frac{l\pi}{a_1}$$

$$\eta_k = \frac{k\pi}{a_2}$$

de même

$$\xi_{kl} = \sqrt{v_l^2 + \eta_k^2}$$

$$k_s = v$$

$$k'_s = \frac{v\beta}{\alpha} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$s^* = \alpha\beta = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$$

dans le cas où les valeurs de l_1 et l_2 sont très supérieures à celles de a_1 et a_2 , les fonctions th sont remplacées par 1.

Abstract—Thermal contact resistances between solid materials constitute a major challenge in numerous industries. Most works on this subject deal with the modeling of the contact resistance between flat surfaces. A microscopic modeling of the cylinder–cylinder contact in steady state is proposed in this paper. This three-dimensional model is completely analytical. It first allows a representation of the thermal contact resistance using a three resistance network: the constriction resistance is thus pinpointed. It also shows that, generally, the cylinder–cylinder constriction resistance can be replaced by a plane–plane constriction resistance: this result allows an extension of correlations relative to plane–plane models to the cylinder–cylinder case.